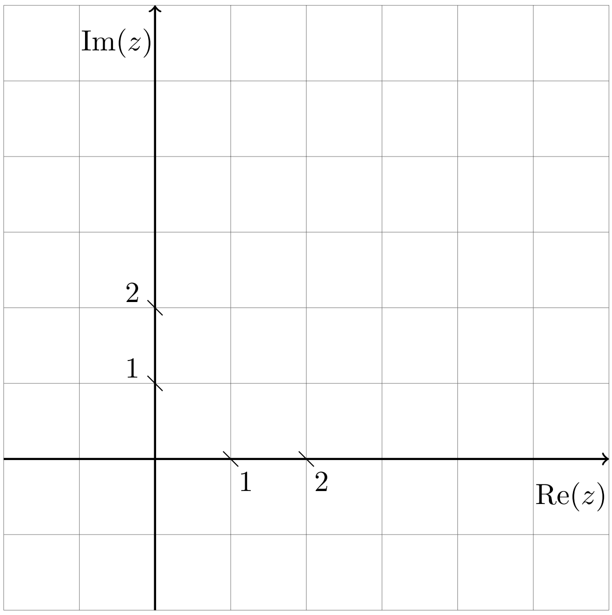
Analysis 1 – Wiederholung

G. Pohlenz

Wintersemester 2024/2025

I. Mengenlehre und Logik

1. Beschreibe die Menge $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10 \wedge (2 \mid x \vee 3 \mid x)\}$ extensional.
2. Skizziere die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 - i| \leq 2 \vee (|z-2| < |z-4| \wedge |z-2| < |z|)\}$.



3. Es seien $A = \{1, 5, 7, 11, 13\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{\star, \triangle, \diamond\}$. Bestimme
   a) $A \cup B$
   b) $A \cap B$
   c) $A \setminus B$
   d) $(A \cap B) \times C$
   e) $A \cap (B \times C)$

II. Vollständige Induktion

1. Es seien $a, r \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $r \neq 1$. Zeige für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, dass

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = a\frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

2. Zeige für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, dass

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = 2 + (n-1)2^{n-1}.$$

3. Zeige für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$, dass

$$n^n \geq (n+1)!.$$

4. Zeige für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dass gilt

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}.$$

5. (Bernoulliungleichung) Es sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x > -1$. Zeige per vollständiger Induktion für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

6. Es seien $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ natürliche Zahlen. Zeige, dass im Fall

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1$$

gilt, dass $a_n < 2^{n!}$.

7. Zeige für beliebige natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$, dass

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (i + j) = \frac{mn(m+n+2)}{2}.$$

kleiner Hinweis: Führe eine doppelte Induktion durch.

großer Hinweis: Es sei $S(m, n)$ die zu zeigende Aussage für gewisse $m, n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $S(1, 1)$ gilt. Zeige dann mit vollständiger Induktion, dass $S(m, 1)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt. Nutze dann für festes $m_0 \in \mathbb{N}$ die nun gezeigte Aussage $S(m_0, 1)$ als Induktionsanfang für eine vollständige Induktion über n, zeige also $S(m_0, n) \rightsquigarrow S(m_0, n+1)$.

8. $(*)$ Zeige, dass die Gleichung $x^4 + y^4 = z^2$ keine Lösung $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ hat.

Hinweis: Führe die Annahme, es gebe eine in z minimale Lösung, zum Widerspruch.

III. Komplexe Zahlen

Es seien $z, w \in \mathbb{C}$.

1. Zeige $|zw| = |z| \cdot |w|$.
2. Zeige $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. Zeige $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.
4. Zeige $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.
5. Zeige $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
6. Zeige $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
7. Bestimme $\mathrm{Re}\left(\frac{3-i}{2i}\right)$.
8. Bestimme alle Lösungen von $z^4 + 4z^3 - 4z^2 + 4z = 5$ in den komplexen Zahlen.

IV. Metrische Räume

1. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass für alle $x, y, z \in X$ gilt:
$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z).$$
2. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und d die diskrete Metrik, d. h.
$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}; (x,y) \mapsto \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$$
Es sei $f\colon X \to X$ eine Funktion. Zeige, dass f Lipschitz-stetig ist.
3. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine nicht-leere Menge. Wir definieren für $x \in X$ den Abstand von x zu A mittels
$$d(x, A) \coloneqq \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}.$$
Zeige:
   a) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A)$.
   b) Die Funktion $X \to \mathbb{R}; x \mapsto d(x,A)$ ist Lipschitz-stetig.

V. Archimedisches Prinzip

1. Zeige ausgehend vom Archimedischen Prinzip, d. h. $\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : x < n$, dass
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

VI. Überabzählbarkeit

In dieser Aufgabe sei $\mathbb{R}$ definiert als eine Menge, die

- mindestens zwei Elemente enthält,
- total geordnet ist, d. h. für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq x$, für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt immer $x \leq y$ oder $y \leq x$, und falls beides gilt, folgt $x = y$, und für $x, y, z \in \mathbb{R}$ folgt aus $x \leq y$ und $y \leq z$, dass $x \leq z$,
- dicht geordnet ist, d. h. für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gibt es stets ein $z \in \mathbb{R}$ mit $x < z < y$,
- keine Lücken hat, d. h. wenn $\mathbb{R} = A \sqcup B$, wobei A und B nicht-leere Mengen sind, und $\forall a \in A, b \in B : a \leq b$, dann gibt es ein Element $c \in \mathbb{R}$, sodass für jedes $x \in \mathbb{R}$: $(x < c \Rightarrow x \in A) \land (c < x \Rightarrow x \in B)$. Dabei kann c in A oder B liegen. Solch ein Tupel (A, B) nennen wir einen *Dedekind-Schnitt*.

Hierin meint $x < y$, dass $x \leq y$ und $x \neq y$, und „$\sqcup$" steht für die disjunkte Vereinigung.

1. Zeige, dass zwischen zwei verschiedenen $x, y \in \mathbb{R}$ stets unendlich viele Elemente von $\mathbb{R}$ liegen müssen.

Angenommen, $(x_1, x_2, \dots)$ ist eine Folge in $\mathbb{R}$, in welcher jedes Element von $\mathbb{R}$ vorkommt. Ohne Einschränkung sei $x_1 < x_2$. Wir definieren nun zwei Folgen $(a_1, a_2, \dots)$ und $(b_1, b_2, \dots)$ mit $a_1 := x_1$, $b_1 := x_2$. Weiter definieren wir $a_{n+1} := x_i$ wobei i der kleinste Index ist, der größer ist als der zuvor für b_n ausgewählte Index und für den $a_n < x_i < b_n$ gilt. Außerdem definieren wir $b_{n+1} := x_i$, wobei i der kleinste Index ist, der größer ist als der zuvor für a_{n+1} ausgewählte Index und für den $a_{n+1} < x_i < b_n$.

2. Warum ist die Definition eines solchen a_{n+1} stets möglich und eindeutig?
3. Warum ist die Definition eines solchen b_{n+1} stets möglich und eindeutig?
4. Welches Monotonieverhalten hat die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Welches Monotonieverhalten hat die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
6. Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch b_1 beschränkt wird (von oben oder von unten?).
7. Zeige, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch a_1 beschränkt wird (von oben oder von unten?).

Wir definieren $A := \{x \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x < b_n\}$ und $B := \mathbb{R} \setminus A$.

8. Zeige $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in A \land b_n \in B$.

A und B sind also nicht-leer.

1. Zeige $\forall a \in A, b \in B : a < b$.

(A, B) ist also ein Dedekind-Schnitt und somit gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, für das insbesondere $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < c < b_n$ gilt. Es gibt nach Definition von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $j \in \mathbb{N}$, sodass $c = x_j$.

10. Zeige $j > 2$.
11. Begründe, dass es einen kleinsten Index i mit $i > j$ geben muss, für den x_i in einer der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vorkommt.
12. Es sei $m := \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_{n+1} = x_i \lor b_{n+1} = x_i\}$. Leite damit einen Widerspruch zur Wahl von i her, indem du die Eigenschaften von x_j und die Definition der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nutzt.
13. Folgere, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

VII. Binomialkoeffizienten

1. Zeige für $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leq m$, dass
$$\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n-1} + \binom{m}{n}.$$

2. Zeige für $p \in \mathbb{N}$ prim und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \neq p$, dass $p \mid \binom{p}{k}$.

3. Zeige für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$, dass
$$\sum_{i=m}^{n} \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

VIII. Folgenkonvergenz

1. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexwertige konvergente Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Zeige, dass dann $a_n + b_n \to a + b$.

2. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass jede konvergente Folge darin eine Cauchy-Folge ist.

3. Bestimme den Grenzwert von
$$\left(\left(1 + \frac{-3}{n^2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

4. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass dann auch
$$\left(\frac{a_n}{a_n + 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
monoton wachsend ist. Konvergiert diese Folge stets?

5. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reellwertige Folge mit $x_{n+1} - x_n \to x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass dann
$$\frac{x_n}{n} \to x.$$

6. Gebe ein Beispiel für eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \colon D \to \mathbb{R}$ für ein Intervall $D \subseteq \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

IX. Reihenkonvergenz

1. Untersuche, ob $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4+2n^2+5}{2n^6+3n^3+n} < \infty$.

2. Untersuche, ob $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+6n-8} < \infty$. Falls ja, bestimme den Grenzwert.

   Hinweis: Partialbruchzerlegung.

3. Untersuche, ob $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{n-\frac{1}{n^2}} < \infty$.

4. ($*$) Existiert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$? Falls ja, bestimme den Grenzwert.

   Hinweis: Finde eine Funktion, für die bei (dem Versuch) der Berechnung eines dazugehörigen Integrals solch eine Reihe auftauchen kann.

5. Es sei $\varepsilon > 0$.

   a) Begründe kurz
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{e^{\varepsilon \ln(x)}} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{(e^{\varepsilon})^y}.$$

   b) Zeige damit $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\varepsilon}} = 0$.

   c) Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$:
   $$n^2 e^{-n^{\varepsilon}} = e^{-n^{\varepsilon}(1-2\cdot\frac{\ln(n)}{n^{\varepsilon}})}.$$

   d) Zeige damit $\lim_{n\to\infty} n^2 e^{-n^{\varepsilon}} = 0$.

   e) Zeige damit: $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : e^{-n^{\varepsilon}} \leq \frac{1}{n^2}$.

   Hinweis: Wenn es hilft, bedenke, dass $n^2 e^{-n^{\varepsilon}} = \frac{e^{-n^{\varepsilon}}}{1/n^2}$.

   f) Zeige damit, dass
   $$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^{\varepsilon}} < \infty.$$

X. Stetigkeit und Differenzierbarkeit

1. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige, dass beschränkte Mengen von f auf beschränkte Mengen abgebildet werden.

2. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Gilt die Aussage der vorherigen Aufgabe im Allgemeinen auch für stetige $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$?

3. Es sei I ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige, dass $f(I)$ ein Intervall ist.

4. Es seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume sowie $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Zeige, dass wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to p \in X$ gilt, dass $f(x_n) \to f(p)$, dann f in p stetig ist.

5. Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 0, & x \leq \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

6. Zeige, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto e^x + \frac{1}{5}x^5 + x^3$ bijektiv ist. Bestimme $(f^{-1})'(1)$.

7. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2 - 2x$. Zeige, dass ein $x \in (0,2)$ mit $f'(x) = 0$ existiert, ohne die Ableitung von f zu bestimmen.

8. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine in 0 differenzierbare Funktion mit $f'(0) = 1$. Bestimme

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(3x) - f(x)}{x}.$$

9. ($*$) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $f(0) = 0$ und $|f'(x)| \leq |f(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass dann $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   Hinweis: Zeige, dass die Menge N der Nullstellen von f abgeschlossen und offen ist. Zeige dafür, dass $\sup\{|f(x)| \mid x \in (x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}\} = 0$ für $x_0 \in N$. Nutze zuletzt, dass wenn $A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und offen ist, dann $A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{R}$ sein muss.

XI. Integrale

1. Bestimme

$$\int_2^4 \frac{4x}{2 - 8x^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. Bestimme

$$\int_{-2}^3 xe^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Konvergiert das Integral

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x?$$

Weitere zu berechnende Integrale findet man zum Beispiel hier.

Quellen

Einige Aufgaben tropfen aus meinem Kopf, die Aufgaben zur vollständigen Induktion entstammen dem *Handbook of Mathematical Induction – Theory And Applications* von D. S. Gunderson. Der Aufgabenblock zur Überabzählbarkeit hält sich sehr dicht an einem Wikipediaartikel zu einem Beweis von Cantor. Das ist teilweise abgeschrieben. Die Teilaufgaben zur letzten Aufgabe im Abschnitt zur Reihenkonvergenz halten sich an eine Lösung der letzten Teilaufgabe vom Mystery Customer, einige weitere Aufgaben stammen aus seiner Fragensammlung. Andere Aufgaben entspringen ungesicherten Felsspalten. Bearbeitung auf eigene Gefahr!

Lernende mögen sich insbesondere darauf hingewiesen fühlen, dass dieses Blatt nicht einmal alle in der Vorlesung behandelten Themen streift. Das Analysis-ABC hilft vielleicht beim Aufspüren der Lücken.