Fundamentalsatz der Algebra – G. Pohlenz

Dieser Beweis ist eine ausführliche Version des Beweises des Satzes, wie er in einer Übung formuliert wurde, die dem Buch *Analysis 1* von Königsberger[1] folgt. In eckigen Klammern werde ich an einigen Stellen zusätzliche Intuition geben.

Zum Verständnis nötiges Vorwissen: Satz vom Minimum und Maximum, Existenz k-ter Wurzeln, Eigenschaften stetiger Funktionen und kompakter Mengen.

Theorem. *Jedes Polynom von Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten besitzt in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.*

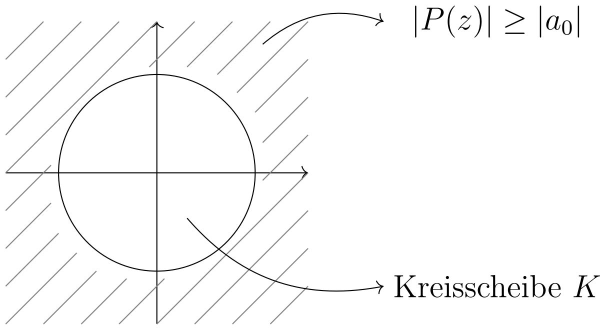
Wir werden, um das Theorem zu beweisen, zuerst zeigen, dass für jede Polynomfunktion P in $\mathbb{C}$ der Betrag $|P|$ ein Minimum in $\mathbb{C}$ hat. Mit Hilfe einiger weiterer Funktionen können wir dann zeigen, dass $|P|$ kein Minimum an Stellen x_0 hat, für die $P(z_0) \neq 0$ gilt. Daraus folgt schließlich, dass es ein z_0 mit $P(z_0) = 0$ geben muss.

Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ mit $\forall i \in \{0, 1, ..., n\} : a_i \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$.

Lemma. $|P|$ hat ein Minimum auf $\mathbb{C}$.

Klar ist, dass $\lim_{z\to\infty} |P(z)| = \infty$ [denn für sehr große z wird $a_n z^n$ im Betrag sehr groß und die anderen Terme des Polynoms nehmen wenig Einfluss]. Zudem sehen wir, dass $|P(0)| = |a_n 0^n + ... + a_1 0 + a_0| = |a_0|$.

Es gibt eine Kreisscheibe K um 0 herum, sodass für jedes $y \in \mathbb{C}$ außerhalb der Kreisscheibe K gilt, dass $|P(y)| \geq |a_0|$ [innerhalb der Kreisscheibe kann es auch solche Werte geben, aber außerhalb des Kreises gibt es sicher keine y mehr, deren Funktionswerte unter $|a_0|$ liegen].



Da $|P|$ stetig und K kompakt ist, ist auch $|P(K)|$ kompakt. Mit dem Satz vom Minimum und Maximum gibt es also ein Minimum in K, d.h. $\exists z_0 \in K : \forall z \in K : f(z_0) \leq f(z)$.

Da für z außerhalb der Kreisscheibe $|P(z)| \geq |a_0|$ gilt, $|P(0)| = |a_0|$ und die anderen Werte *in* der Scheibe aber möglicherweise kleiner sind, ist das Minimum der Kreisscheibe somit auch das globale Minimum von $|P|$.

[1] dort zu finden auf Seite 92

Lemma. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) \neq 0$ und setze $Q(z) \coloneqq \dfrac{P(z+z_0)}{P(z_0)}$. Dann gilt $deg(Q) = n$ und $\exists b_1, ..., b_n \in \mathbb{C}$, sodass $Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + ... + b_1 z + 1$ und $b_n \neq 0$.

Weil $Q(z) = \dfrac{P(z+z_0)}{P(z_0)}$ und $P(z_0)$ konstant ist, gilt $deg(Q) = deg(P) = n$.
Also $\exists b_1, ..., b_n \in \mathbb{C}$, sodass $Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0$.
Weiter gilt $b_0 = Q(0) = \dfrac{P(0+z_0)}{P(z_0)} = \dfrac{P(z_0)}{P(z_0)} = 1$, also $Q(z) = b_n z^n + ... + b_1 z + 1$.

Lemma. Sei $m \coloneqq \min\{k \in \mathbb{N} : b_k \neq 0\}$. Dann gibt es ein Polynom $R(z)$, sodass

$$Q(z) = 1 + b_m z^m + z^{m+1} R(z).$$

Sei $m \coloneqq \min\{k \in \mathbb{N} : b_k \neq 0\}$. Weil $b_n \neq 0$ [das haben wir eben gezeigt], ist klar, dass $1 \leq m \leq n$. Dann gilt für $R(z) = b_n z^{n-(m+1)} + ... + b_{m+1}$:

$$\begin{aligned}
Q(z) &= b_n z^n + ... + b_{m+1} z^{m+1} + b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_1 z + 1 \\
&= b_n z^n + ... + b_{m+1} z^{m+1} + b^m z^m + 0 z_{m-1} + ... + 0 z + 1 \\
&= b_n z^n + ... + b_{m+1} z^{m+1} + b_m z^m + 1 \\
&= R(z) z^{m+1} + b_m z^m + 1 \\
&= 1 + b_m z^m + z^{m+1} R(z), \text{ was gesucht war.}
\end{aligned}$$

Lemma. Es gibt ein $\phi \in \mathbb{C}$, sodass $\phi^m = \dfrac{-1}{b_m}$. Außerdem gilt für alle $s \in \mathbb{R}$, dass

$$Q(s\phi) = 1 - s^m + s^{m+1} \phi^{m+1} R(s\phi).$$

Weil $\dfrac{-1}{b_m} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, hat der Term eine Polarkoordinatendarstellung $\dfrac{-1}{b_m} = r \cdot e^{\alpha i}$ mit $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Wählen wir $\phi = \sqrt[m]{r} \cdot e^{\frac{\alpha}{m} i}$, so ist dies das gewünschte ϕ, denn

$$\phi^m = \left(\sqrt[m]{r} \cdot e^{\frac{\alpha}{m} i}\right)^m = (\sqrt[m]{r})^m \cdot \left(e^{\frac{\alpha}{m} i}\right)^m = r \cdot e^{\frac{\alpha}{m} i \cdot m} = r \cdot e^{\alpha i} = \frac{-1}{b_m}.$$

Nun wissen wir wegen des vorigen Lemmas und dieser Definition von ϕ für alle $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
Q(s\phi) &= 1 + b_m (s\phi)^m + (s\phi)^{m+1} R(s\phi) \\
&= 1 + b_m s^m \phi^m + s^{m+1} \phi^{m+1} R(s\phi) \\
&= 1 + b_m s^m \frac{-1}{b_m} + s^{m+1} \phi^{m+1} R(s\phi) \\
&= 1 - s^m + s^{m+1} \phi^{m+1} R(s\phi), \text{ was gesucht war.}
\end{aligned}$$

Lemma. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; s \mapsto |Q(s\phi)|$ hat kein Minimum in $s = 0$.

Sei $s \in [0, 1]$ [wenn wir mit dieser Einschränkung zeigen können, dass an der Stelle 0 kein Minimum der Funktion ist, gilt das auch ohne sie]. Betrachten wir zuerst den Fall $R(z) = 0$ [d.h. $R(z)$ ist das Nullpolynom, also ist $deg(Q) = m$]. Dann ist wegen des vorigen Lemmas

$$f(s) = |Q(s\phi)| = |1 - s^m + s^{m+1}\phi^{m+1}R(s\phi)| \overset{R(z)=0}{=} |1 - s^m| \overset{s\in[0,1]}{=} 1 - s^m.$$

Offensichtlich ist hier an $s = 0$ kein Minimum [$f(0) = 1 - 0^m = 1 > 0 = 1 - 1^m = f(1)$].

Im Fall, dass $R(z) \neq 0$, [die Einschränkung $s \in [0, 1]$ gilt weiterhin] können wir den letzten Term abschätzen: Da $[0, 1]$ kompakt ist, hat f ein Maximum auf dem Intervall. Daher gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|\phi^{m+1}| \cdot |R(s\phi)| \leq c$. Damit gilt:

$$Q(s\phi) = 1 - s^m + s^{m+1}\phi^{m+1}R(s\phi) \leq 1 - s^m + cs^{m+1}.$$

Falls zusätzlich für ein $s \in (0, 1]$ gilt, dass $s < \dfrac{1}{c}$ [so ein s gibt es immer], folgt

$$|Q(s\phi)| \leq 1 - s^m + cs^{m+1} = 1 - s^m + \underset{\leq 1}{cs} \cdot s^m < 1.$$

Also kann an $s = 0$ kein Minimum sein, da $f(0) = 1$ [aber für $s \in (0, \frac{1}{c})$: $f(s) < 1$].

Lemma. $|Q|$ hat kein Minimum an der Stelle $z = 0$.

Dies folgt sofort, da das vorige Lemma ein $s \in \mathbb{R}$ garantiert, sodass

$$1 = |Q(0)| = |Q(0\phi)| > |Q(s\phi)|.$$

Lemma. $|P|$ hat an einer Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) \neq 0$ kein Minimum.

Mit Erinnerung an die Definition von Q und mit dem eben gewonnenen s gilt für $P(z_0) \neq 0$:

$$1 > |Q(s\phi)| = \frac{|P(s\phi + z_0)|}{|P(z_0)|} \iff |P(z_0)| > |P(s\phi + z_0)|,$$

also hat $|P|$ an Stellen $x_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) \neq 0$ kein Minimum.

Da wir anfangs gesehen haben, dass $|P|$ sicher ein Minimum hat, und wir aber mit dem letzten Lemma gezeigt haben, dass dieses Minimum sicher nicht an Stellen $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) \neq 0$ ist, muss es also ein z_0 mit $P(z_0) = 0$ geben, welches also auf das Minimum von $|P|$ abgebildet wird. Also hat jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.

Folgende Beweise folgen denen aus der von mir gehörten Vorlesung zur Linearen Algebra. Sie sind kürzer gehalten als der Beweis eben.

Lemma. Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynome mit $g \neq 0$. Dann gibt es eindeutige Polynome $q, r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f = gq + r$ und $deg(r) < deg(g)$.

Sei r das Polynom kleinsten Grades in $\{f - gp \mid \forall p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$. Dann gilt $deg(r) < deg(g)$, denn angenommen $deg(r) \geq deg(g)$, dann gibt es $a \in \mathbb{C}, d \in \mathbb{N}_0$ mit $deg(r - g(ax^d)) < deg(r)$ [a und d wählt man so, dass durch das $g(ax^d)$ der Term höchsten Grades von r aufgehoben wird. Damit wäre das ursprünglich gedachte r falsch gewählt, denn auch $r - g(ax^d)$ liegt in der Menge $\{f - gp \mid \forall p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$].

Zudem sei q gegeben durch $r = f - gq$. Dann gilt $f = gq + r$ und $deg(r) < deg(g)$ wie gewünscht.

Das ist eindeutig, denn angenommen es gäbe $q, \tilde{q}, r, \tilde{r}$ mit $f = gq + r = g\tilde{q} + \tilde{r}$, $deg(r), deg(\tilde{r}) < deg(g)$, dann folgt $r - \tilde{r} = (\tilde{q} - q)g$ und $deg(r - \tilde{r}) < \deg(g)$. Außerdem $deg(r - \tilde{r}) = deg(\tilde{q} - q) + deg(g)$. Es folgt $deg(\tilde{q} - q) = -\infty$, also $\tilde{q} = q$, also $\tilde{r} = r$.

Lemma. Ist x_0 Nullstelle eines Polynoms $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dann gibt es genau ein Polynom $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f = (x - x_0)q$ und $deg(q) = deg(f) - 1$.

Sei x_0 eine Nullstelle von f, d.h. $f(x_0) = 0$. Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto (x - x_0)$. Mit dem vorigen Lemma gibt es eindeutige Polynome $q, r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sodass $f = (x - x_0)q + r$ und $deg(r) < 1$. Wegen $f(x_0) = 0$ und $((x - x_0)q)(x_0) = 0$ folgt $r = 0$. Da $deg(g) = 1$, $deg(f) = n$ und $f = gq$ folgt $deg(gq) = deg(f) = n = 1 + (n - 1)$, also $deg(q) = deg(f) - 1$.

Definition: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom, $x_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f und $k \in \mathbb{N}$ die größte Zahl mit $f = (x - x_0)^k \cdot q$ für ein Polynom $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dann heißt k die Vielfachheit der Nullstelle $x_0 \in \mathbb{C}$ und x_0 heißt k-vielfach.

Korollar. *Ein Polynom von Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten besitzt in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen, wobei einige vielfach vorkommen können.*

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; x \mapsto f(x)$ ein Polynom n-ten Grades und sei x_0 Nullstelle von f. Nach dem vorigen Lemma: $\exists g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; x \mapsto g(x)$, sodass $f(x) = (x - x_0)g(x)\ \forall x \in \mathbb{C}$ und $deg(g) = deg(f) - 1$. Falls $deg(g) \geq 1$, so können wir darauf den Fundamentalsatz der Algebra anwenden. Insgesamt können wir so n-mal den Fundamentalsatz der Algebra und das vorige Lemma anwenden, um weitere Nullstellen zu finden.