Ein schneller Dimensionswechsel – G. Pohlenz

Für diesen Artikel ist es hilfreich, wenn du weißt, wie eine Abbildung definiert ist, was ein Vektorraum und eine Basis ist, und wie man Matrizen multipliziert. Je mehr du von einer Linearen Algebra 1 weißt, umso besser. Für ein bisschen Spaß reicht aber auch eine gute Intuition für Abbildungen und Beherrschen der Matrixmultiplikation.

Eine kleine Definition

Seien V, W K-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt linear, wenn gilt:

$$\forall x, y \in V : f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$\forall x \in V : \forall \lambda \in K : f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Wenn ein $f : V \to W$ linear ist, schreibt man auch $f \in Hom(V, W)$.

Der Einstieg wirkt schwieriger als er ist

In der Linearen Algebra lernt man so einiges über lineare Abbildungen. Unter anderem auch, dass eine beliebige lineare Abbildung eindeutig durch die Bilder der Elemente einer Basis der Definitionsmenge definiert wird. Das sind vielleicht neue Wörter für dich, doch du brauchst keine Angst zu haben. Wir schauen uns das alles hier nur an einem kleinen Beispiel an, das mir sehr gefällt.

Wir bewegen uns in einem Raum...

Wahrscheinlich hast du schon einmal etwas vom $\mathbb{R}^3$ gehört. Das ist der dreidimensionale Raum, in dem man in der Schule viel rechnet. Darin können Punkte, Gerade, Ebenen, Körper, ... liegen. Es gilt, dass der $\mathbb{R}^3$ durch die Menge

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

aufgespannt wird. Diese Menge heißt Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ und ihre Elemente heißen Einheitsvektoren. Dass der $\mathbb{R}^3$ durch B aufgespannt wird, bedeutet: jeder beliebige Punkt im Raum kann als Linearkombination dieser drei Vektoren dargestellt werden, denn für ein beliebiges

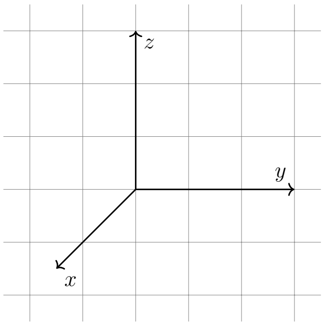
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kann man sagen

$$a = x,\ b = y,\ c = z$$

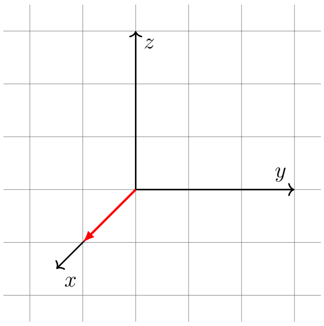
und schon geht die Gleichung immer auf.

Nun zur Funktion!



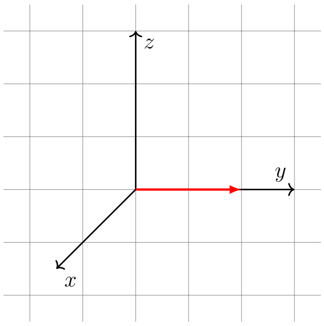
Mein Ziel ist, dass wir eine lineare Funktion finden, die für gegebene dreidimensionale Koordinaten eines Punktes ausgibt, wohin wir diesen Punkt malen müssen, wenn wir ihn in ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem auf Papier zeichnen wollen.

Wir suchen also eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Dabei muss $f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn wenn das nicht gelten würde, kannst du selber überprüfen, wie die Linearität zerbricht. Zudem können wir f eindeutig definieren, indem wir vorgeben, worauf die drei Vektoren in B abgebildet werden.

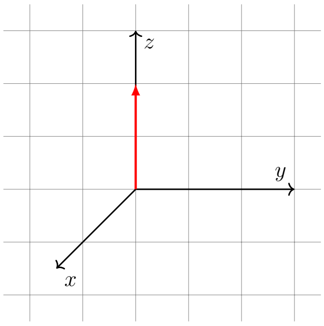


Fangen wir mit dem schwierigsten Vektor an: der Vektor $(1\ 0\ 0)^T$ (also der Spaltenvektor) geht vom Koordinatenursprung zu einem Punkt auf der x-Achse, der eine Einheit weit weg vom Koordinatenursprung ist. Im kartesischen Koordinatensystem geht die x-Achse vom Ursprung aus diagonal nach unten links und sie wirkt ein wenig „gestaucht". Der Punkt $(1, 0, 0)$ wird ein Kästchen weiter unten und links als der Ursprung dargestellt. Wenn ein Kästchen unsere Einheit ist, liegt der Punkt zweidimensional also auf den „Kästchenkoordinaten" $(-1, -1)$, also sollte gelten:

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Schnell können wir jetzt feststellen, wohin $(0\ 1\ 0)^T$ abgebildet wird. Die y-Achse im kartesischen Koordinatensystem geht horizontal nach rechts. Der Punkt $(0, 1, 0)$ liegt zwei Kästchen rechts vom Ursprung. Er wird in der Höhe nicht verschoben. Also gilt $f(0\ 1\ 0)^T = (2\ 0)^T$



Ebenso können wir $f(0\ 0\ 1)^T$ ermitteln. Die z-Achse geht senkrecht vom Ursprung nach oben, der Punkt $(0, 0, 1)$ wird also zwei Kästchen über dem Ursprung dargestellt, demnach liegt er auf den Kästchenkoordinaten $(0, 2)$, also $f(0\ 0\ 1)^T = (0\ 2)^T$.

Jetzt wissen wir also, wohin unsere Basis B abgebildet wird. Damit können wir zwei Dinge machen: eine allgemeine Bildungsvorschrift für beliebige Vektoren ermitteln und die zu f gehörende Matrix A finden. Überlegen wir uns zuerst eine allgemeine Bildungsvorschrift. Das heißt, zu einem gegebenen $(x\ y\ z)^T$ wollen wir den Funktionswert finden. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da f linear ist, gilt dann:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und da wir diese Funktionswerte bereits kennen, wissen wir:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y \\ -x + 2z \end{pmatrix},$$

$$\text{also } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y \\ -x + 2z \end{pmatrix},$$

und so haben wir eine allgemeine Vorschrift gefunden. Du kannst gerne ein paar Punkte ausprobieren und schauen, wie es funktioniert.

Nun suchen wir noch eine Matrix A, die uns $f(x\ y\ z)^T$ ausgibt, wenn wir $A(x\ y\ z)^T$ rechnen. Die Standardbasis erleichtert uns diesen Prozess sehr, denn wenn wir $A \cdot (1\ 0\ 0)^T$ rechnen, ist für das Ergebnis nur die erste Spalte der Matrix wichtig, da alle anderen Spalten durch die Nullen im Einheitsvektor keinen Einfluss nehmen können. Ähnlich ist bei der Multiplikation mit $(0\ 1\ 0)^T$ nur die zweite Spalte von A wichtig und bei $A \cdot (0\ 0\ 1)^T$ nur die dritte.

Da jeweils genau eine Spalte das Bild eines Einheitsvektors ergibt, kennen wir diese nun eindeutig:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hier heißt f die zu A assoziierte lineare Abbildung. Und wir können noch etwas definieren: $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$, und es gilt $f = f_A$.

Nun haben wir alles geschafft, was wir schaffen wollten. Wenn wir einen Punkt aus dem Raum ins dreidimensionale kartesische Koordinatensystem zeichnen wollen, können wir jetzt sowohl mit f als auch mit f_A herausfinden, wohin der Punkt gemalt werden muss. Damit spart man sich das Kästchenzählen nach vorne, rechts und oben, allerdings muss man jetzt rechnen. Doch wenn du das hier alles gelesen hast, wird dir dieser neue Weg wahrscheinlich mehr Freude bereiten.