Basissuche für $g^2 = id_V$ – G. Pohlenz

Warum schnell, wenn es auch schön geht?

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $g \in End(V)$ mit $g^2 = id$.
Was sind die Eigenwerte von g? Zeige: $1 + 1 \neq 0$ in $K \implies g$ diagonalisierbar.

Es gibt einen schnellen und einen schönen Weg, die zweite Frage zu beantworten. Gehen wir also beide Pfade entlang und bewundern die Einsicht, die uns der zweite gewährt und die im ersten unbeachtet bleibt.

Eigenwerte von g

Es gilt für alle Eigenvektoren $v \in V$: $\exists \lambda \in K : g(v) = \lambda v \implies g(g(v)) = v = g(\lambda v) = \lambda g(v) = \lambda\lambda v = \lambda^2 = v$, also gilt $1 = \lambda^2$ für mögliche Eigenwerte λ. Es sind also nur $\lambda = 1 \vee \lambda = -1$ mögliche Eigenwerte (da $\lambda^2 - 1$ ein Polynom zweiten Grades ist, kann es auch keine weiteren Lösungen geben).

Nun wollen wir die Existenz zeigen. Beobachten wir dazu:

$$g(v + g(v)) = g(v) + g(g(v)) = g(v) + v = v + g(v)$$

$$\implies v + g(v) = 0 \vee v + g(v) \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } 1$$

$$g(v - g(v)) = g(v) - g(g(v)) = g(v) - v = -(v - g(v))$$

$$\implies v - g(v) = 0 \vee v - g(v) \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } -1$$

Wenn für ein $v \in V$ mit $v \neq 0$ gilt, dass $v + g(v) = 0$, bzw. $v - g(v) = 0$, ist v selbst Eigenvektor (denn dann gilt $-v = g(v)$, bzw. $v = g(v)$). Falls v aber kein Eigenvektor ist, finden wir mit $v + g(v)$ und $v - g(v)$ zwei Eigenvektoren (bzw. nur einen, falls in K gilt, dass $1 = -1$). In jedem Fall gibt es also mindestens einen Eigenvektor.

Diagonalisierbarkeit

Wir wollen nun zeigen $V = Eig(g, 1) \oplus Eig(g, -1)$. Wir stellen fest $\forall v \in V : v = \frac{1}{2}(v + g(v)) + \frac{1}{2}(v - g(v))$ (das ist wohldefiniert, falls $1 + 1 = 2 \neq 0$). Mit der Beobachtung oben haben wir auch festgestellt, dass $v + g(v) \in Eig(g, 1)$ und $v - g(v) \in Eig(g, -1)$. Also $\forall v \in V : v \in Eig(g, 1) + Eig(g, -1) \implies V \subseteq Eig(g, 1) + Eig(g, -1)$. Da $Eig(g, 1) \leqslant V$ und $Eig(g, -1) \leqslant V$, ist $Eig(g, 1) + Eig(g, -1) \leqslant V$, also $Eig(g, 1) + Eig(g, -1) \subseteq V$. Also wissen wir nun $V = Eig(g, 1) + Eig(g, -1)$.
Weiter gilt, falls $1 \neq -1$, dass $Eig(g, 1) \cap Eig(g, -1) = \{0\}$ (das möchte ich hier nicht beweisen, aber gilt für alle verschiedenen Eigenräume eines Vektorraums). Also gilt nach Definition der direkten Summe: $V = Eig(g, 1) \oplus Eig(g, -1)$, wie wir zeigen wollten.
Damit gilt auch $dim(V) = dim(Eig(g, 1)) + dim(Eig(g, -1))$ und damit ist g diagonalisierbar. (Nimm dir eine Basis beider Eigenräume ($\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$), füge sie zusammen um eine Basis für V zu erhalten ($\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$) und $M_{\mathcal{B}}(g)$ ist dann eine Diagonalmatrix)

Ein zweiter Weg

Nun haben wir relativ trocken gezeigt, dass die Funktion diagonalisierbar ist. Eine wirkliche Einsicht, wie wir eine Basis für die dazugehörige ähnliche Diagonalmatrix finden können, haben wir allerdings nicht gewonnen. Dazu soll dieser Abschnitt dienen.

Statt wie oben zu zeigen, dass die Dimension der Eigenräume gleich der Dimension des Vektorraums sind, wollen wir hier eine Basis des Vektorraums finden, indem wir $dim(V)$ viele linear unabhängige Eigenvektoren zusammensammeln. Von nun an sei $dim(V) = n$.

Wähle dafür zuerst ein beliebiges $v \in V$. Dieses ist entweder ein Eigenvektor, oder nicht. Falls ja, behalte es und gehe zum nächsten Schritt. Falls nein, wähle $v + g(v)$ und fahre dann fort (da v dann kein Eigenvektor war, ist $v + g(v)$ sicher ungleich 0).

Wenn du r viele linear unabhängige Eigenvektoren hast, wähle ein weiteres $v_j \in V$, das linear unabhängig zu $\{v_i : i \in \{1, 2, ..., r\}\}$ ist. Solange $r < n$ ist dies problemlos möglich. Wenn v_j ein Eigenvektor ist, wiederhole den Schritt mit $\{v_i : i \in \{1, 2, ..., r\}\} \cup \{v_j\}$, bis du n Vektoren hast.</p> <p> Falls es kein Eigenvektor ist, untersuche $v_j + g(v_j)$. Das ist ja auf jeden Fall ein Eigenvektor. Allerdings ist es möglicherweise linear abhängig zu $\{v_i : i \in \{1, 2, ..., r\}\}$. Falls es linear unabhängig ist, ist alles gut und du kannst mit $\{v_i : i \in \{1, 2, ..., r\}\} \cup \{v_j + g(v_j)\}$ fortfahren.</p> <p>Falls es linear abhängig ist, untersuchen wir nun $v_j - g(v_j)$ unter dieser Annahme. Zudem müssen wir hier annehmen, dass $g(v) \neq -g(v)$, d.h. $1 + 1 \neq 0$. Wäre v_j linear abhängig, gilt:

$$v_j + g(v_j) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i.$$

Nehmen wir für einen Widerspruch an, dass zusätzlich $v_j - g(v_j)$ zu $\{v_i : i \in \{1, 2, ..., r\}\}$ linear abhängig wäre, d.h.

$$v_j - g(v_j) = \sum_{i=1}^{r} \lambda'_i v_i.$$

Dann würde durch Addition beider Gleichungen gelten:

$$2v_j = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i + \lambda'_i) v_i.$$

Das ist aber ein Widerspruch zu der Annahme, dass v_j linear unabhängig zu $\{v_i : i \in \{1, 2, ..., r\}\}$ gewählt wurde, also muss unsere Annahme falsch sein. Wir können in diesem Fall also sicher mit $\{v_i : i \in \{1, 2, ..., r\}\} \cup \{v_j - g(v_j)\}$ fortfahren, bis wir n linear unabhängige Vektoren ausgewählt haben.

Durch diese n linear unabhängigen Eigenvektoren erhalten wir eine Basis $\mathcal{B}$ von V, mit der $M_{\mathcal{B}}(g)$ eine Diagonalmatrix ist. Also ist g diagonalisierbar, wenn $1 + 1 \neq 0$.

Und wieso so eine Vektorschnitzeljagd veranstalten?

Der erste Beweist ist der Form nach eleganter, da er relativ kurz das Nötige zeigt. Häufig ist das von Vorteil. Allerdings bietet der zweite eine Methode an, eine Basis für so eine Funktion zu finden, mit der wir eine Diagonalmatrix basteln können. Die Idee dahinter gefällt mir wesentlich mehr, da man der mathematischen Struktur an sich näher ist. Letztendlich sind die beiden Beweise äquivalent und es gibt sicherlich genügend Menschen, die den ersteren wegen seiner Kürze bevorzugen. Den zweiten finde ich trotzdem schöner und ich beschütze die Idee hinter ihm wie ein Otter seinen Lieblingsstein beschützt.

Übung

Konstruiere eine Funktion $g \in End(V)$ (V endlich erzeugt) mit $g^2 = id_V$, die nicht diagonalisierbar ist (zum Beispiel in einem $\mathbb{F}_2$-Vektorraum).